جابر مختاری دهقادی، ولی خادم

اشاره

استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای می‌تواند دقت در رسم شکل‌های هندسی را افزایش دهد و ما این کار را در این مقاله با استفاده از برنامه‌ای به زبان ویژوال C++ انجام داده‌ایم.

برای استفاده از رایانه، ما مثلث را روی محورهای مختصات فرض کرده و با ارائهٔ مختصات سه رأس به رایانه مسائل هندسی را در دستگاه دکارتی تحلیل کرده‌ایم. کار این برنامه رسم میانه‌ها، ارتفاع‌ها، نیم‌سازها، عمودمنصف‌ها، و محاسبهٔ طول آن‌ها و مختصات نقاط هم‌رسی و فاصلهٔ نقاط هم‌رسی از سه رأس و... است. به این ترتیب برنامه‌نویسی و رایانه کار تحقیق در هندسه را شهودی‌تر می‌کند، زیرا همهٔ فاصله‌ها و اندازه‌های مورد نیاز را در اختیار محقق قرار می‌دهد. در این مسیر از استدلال استقرایی برای فرضیه‌سازی استفاده شده و با استدلال استنتاجی آن‌ها را اثبات کرده‌ایم.

مقدمه

ما می‌توانیم بسیاری از فرضیه‌ها و قضایای هندسی را از این برنامه استنتاج و سپس آن‌ها را اثبات کنیم؛ اگرچه درک یک قضیه بسیار مهم‌تر از اثبات آن است.

در ادامه چند تعریف از مفاهیم مورد بحث را ارائه داده‌ایم و در پی آن، سه فرضیه را که با استفاده از برنامهٔ فوق حدس زده‌ایم، اثبات کرده‌ایم و آن‌ها را به‌عنوان قضیه مطرح ساخته‌ایم.

ë**تعریف میانه:** در مثلث به پاره‌خطی که رأس را به وسط ضلع مقابل وصل می‌کند، میانه گویند. هر مثلث سه میانه دارد.

ë**تعریف ارتفاع:** به پاره‌خطی که از رأس بر ضلع مقابل عمود می‌شوند، ارتفاع گویند. روشن است که هر مثلث سه ارتفاع دارد که ممکن است بعضی از آن‌ها خارج از مثلث رسم شوند.

ë**تعریف عمودمنصف:** به پاره‌خطی که از وسط هر ضلع بر آن ضلع عمود می‌شود، عمودمنصف گویند. هر مثلث سه عمودمنصف دارد.

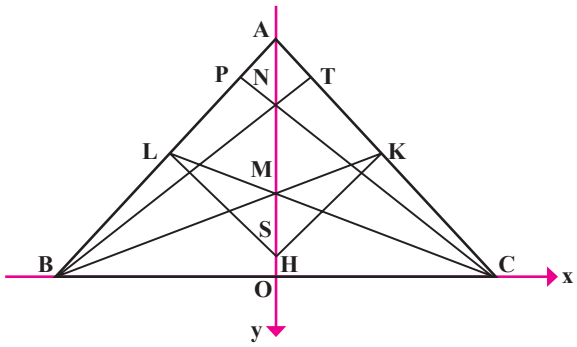
ë**تعریف همرس:** چندخط را همرس گویند، در صورتی‌که از یک نقطه بگذرند. به‌عبارت دیگر، که در یک نقطه همدیگر را قطع کنند. به آن نقطه نقطهٔ همرسی گویند.

نکته: در هندسهٔ پایهٔ دهم ثابت می‌کنیم، ارتفاع‌ها هم‌رس‌اند، میانه‌ها و عمودمنصف‌ها نیز هم‌رس‌اند.

قضیهٔ ۱. در هر مثلث متساوی‌الساقین فاصلهٔ نقطه همرسی ارتفاع‌ها تا نقطهٔ همرسی میانه‌ها دو برابر فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از نقطهٔ همرسی میانه‌هاست.

اثبات: بدون آنکه به کلیت مسئله ایرادی وارد شود، می‌توان مثلث متساوی‌الساقین را روی محورها تصور کرد به‌طوری که مطابق شکل ۱، قاعدهٔ آن روی محور xها باشد، دو ساق آن در دو نقطهٔ B و C محور xها را قطع کنند و محور yها ارتفاع وارد بر BC باشد. (نقطهٔ A روی محور yها و $x_C=-x_B$ است.) اگر N نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، M نقطهٔ همرسی میانه‌ها و S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها باشد، داریم:

$$K(\frac{x_C}{۲},\frac{y_A}{۲})\quad A(۰,y_A)\quad B(x_B,۰)\quad C(x_C,۰)$$



شکل ۱

$$m_{AC}=-\frac{y_A}{x_C}\Rightarrow m_{SK}=\frac{x_C}{y_A}$$

$$SK: y-y_k=(\frac{x_C}{y_A})\times(x-x_K)$$

$$AH: x=۰$$

$$x=۰\Rightarrow y-y_K=-\frac{(x_Cy_K)}{y_A}\Rightarrow y=\frac{(y_A^۲-x_C)}{۲y_A}$$

$$S(۰,\frac{(y_A^۲-x_C)}{۲y_A})$$

$$m_{AC}=\frac{(-y_A)}{x_C}\Rightarrow m_{BT}=\frac{x_C}{y_A}$$

$$\Rightarrow BT: y-y_B=(\frac{y_C}{y_A})(x-x_B)$$

$$\Rightarrow BT: y=(\frac{x_C}{x_A})(x-x_B)$$

$$x=۰\Rightarrow y=\frac{(-x_Bx_C)}{y_A}=\frac{x_C^۲}{y^A}\Rightarrow N(۰,\frac{x_C^۲}{y_A})$$

از طرفی مختصات نقطهٔ M:

$$M(\frac{(x_A+x_B+x_C)}{۳},\frac{(y_A+y_B+y_C)}{۳})\Rightarrow M(۰,\frac{y_A}{۳})$$

$$\frac{MN}{MS}=\frac{\sqrt{((\frac{x_C^۲}{y_A})-\frac{y_A}{۳})^۲}}{\sqrt{(\frac{(y_A^۲-x_C)}{۲y_A}-\frac{y_A}{۳})^۲}}=|-۲|=۲$$

قضیهٔ ۲. در هر مثلث، سه نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها، میانه‌ها و عمودمنصف‌ها روی یک خط راست هستند.

اثبات: مثلث دلخواه ABC را مطابق شکل زیر طوری روی محورهای مختصات قرار می‌دهیم که ضلع AB روی محور xها و مبدأ مختصات وسط ضلع AB قرار داشته باشد؛ یعنی $x_B=-x_A$. این کار به کلیت مسئله ایرادی وارد نمی‌سازد. نقطهٔ O وسط AB و محور yها عمودمنصف ضلع AB است. فرض کنید نقطهٔ S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها و SH و SK عمودمنصف‌های اضلاع BC و AC باشند. داریم:

$$H(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_C}{۲}),\quad K(\frac{(x_C-x_B)}{۲},\frac{y_C}{۲})$$

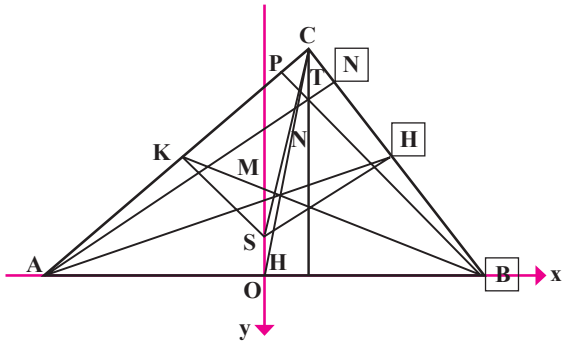
$$m_{BC}=\frac{(y_B-y_C)}{(x_B-x_C)}=\frac{-y_C}{(x_B-x_C)}$$

شیب SH:

$$m_{SH}=\frac{(x_B-x_C)}{y_C}$$

معادلهٔ SH: (رابطهٔ ۱)

$$\frac{y-y_C}{۲}=\left[\frac{(x_B-x_C)}{y_C}\right]\times x-\frac{(x_B^۲-x_C^۲)}{(۲y_C)}$$



شکل ۲

معادلهٔ عمودمنصف وارد بر AB همان خط x=۰ (رابطهٔ ۲) است. از رابطهٔ ۱ و ۲ مختصات نقطهٔ S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها

به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$y_S-(\frac{y_C}{2})=\frac{-(x_B^2-x_C^2)}{(2y_C)}\Rightarrow S(0,\frac{(y_C^2-x_B^2+x_C^2)}{2y_C})$$

اگر M را نقطهٔ همرسی میانه‌های AH، CO و BK در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$x_M=\frac{(2x_O+x_C)}{3}=\frac{x_C}{3},\quad y_M=\frac{(2y_O+y_C)}{3}=\frac{y_C}{3}$$

بنابراین نقطهٔ همرسی میانه‌ها $M(\frac{x_C}{3},\frac{y_C}{2})$ است که البته این نتیجه را می‌توان با نوشتن معادلات BK، CO و حل دستگاه مربوطه به راحتی به‌دست آورید.

حال فرض کنید AN، BP و CR ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AC، BC، و AB باشند و نقطهٔ W نقطهٔ همرسی این سه ارتفاع باشد. داریم:

$$m_{AC}=\frac{(y_C-y_A)}{(x_C-x_A)}=\frac{y_C}{(x_C+x_B)},\quad m_{BP}=\frac{(-x_B-x_C)}{y_C}$$

$$y-0=\left[\frac{(-x_B-x_C)}{y_C}\right]\times(x-x_B)$$: معادلهٔ ارتفاع BP (رابطهٔ ۳).

$$m_{BC}=\frac{(y_C-y_B)}{(x_C-x_B)}=\frac{y_C}{(x_C-x_B)}\Rightarrow m_{AN}=\frac{(x_B-x_C)}{y_C}$$

بنابراین، معادلهٔ AN عبارت است از:

$$y-0=\left[\frac{(x_B-x_C)}{y_C}\right]\times(x+x_B)$$: (رابطهٔ ۴).

که داریم: $x_A=-x_B$

از رابطه‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌گیریم:

$$\left[-\frac{(x_B+x_C)}{y_C}\right]\times(x-x_B)=\left[\frac{(x_B-x_C)}{y_C}\right]\times(x+x_B)$$

$$\Rightarrow(-x_B-x_C-x_B+x_C)x=x_B^2-x_Bx_C-x_B^2-x_Bx_C$$

$$\Rightarrow x=x_C\Rightarrow y=\left[\frac{(x_B-x_C)}{y_C}\right]\times(x_C+x_B)=\frac{x_B^2-x_C^2}{y_C}$$

$$\Rightarrow W(x_C,\frac{(x_B^2-x_C^2)}{y_C})$$

که نقطهٔ همرسی ارتفاع‌هاست. حال نشان می‌دهیم، سه نقطهٔ S، M و W روی یک خط راست هستند. با توجه به مختصات آن‌ها داریم:

$$m_{MW}=\frac{\left[\frac{y_C}{3}-\frac{(x_B^2-x_C^2)}{y_C}\right]}{(\frac{x_C}{3}-x_C)}=\frac{(y_C^2-3x_B^2+3x_C^2)}{(-2x_Cy_C)}$$

(رابطهٔ ۵)

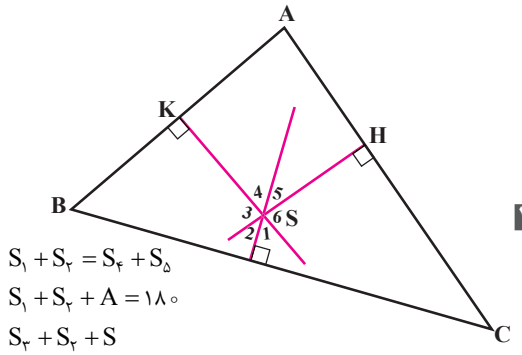
$$m_{MS}=\frac{\left[\frac{y_C^2-x_B+x_C^2}{2y_C}\right]-\frac{y_C}{3}}{0-\frac{x_C}{3}}=\frac{(y_C^2-3x_B^2+3x_C^2)}{(-2x_Cy_C)}$$

رابطهٔ (۶)

به عبارت دیگر، خط گذرنده بر M و W با خط گذرنده بر M و S دارای شیب برابرند. یعنی سه نقطه (M مشترک است) روی خط راست هستند.

قضیهٔ ۳. در صورتی‌که نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها درون مثلث قرار گیرد، سه عمودمنصف یک مثلث در نقطهٔ همرسی سه زاویه با هم می‌سازند که مجموع آن‌ها ۱۸۰ درجه است و با سه زاویهٔ مثلث نظیربه‌نظیر برابرند.

اثبات: مثلث شکل ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید: SL، SK و SH عمودمنصف هستند، نقطهٔ S نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌هاست، و زاویه‌هایی که عمودمنصف‌ها با هم می‌سازند، مطابق شکل، S_4، S_5 و S_3 است. چهارضلعی AKSH دارای دو زاویهٔ قائمه است، پس:



شکل ۳

از طرف دیگر، چهارضلعی KBLS دارای دو زاویهٔ قائمه K_1 و L_1 است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}B+S_3+S_2=180\\ S_4+S_3+S_2=180\end{array}\right\}\Rightarrow B=S_4$$

به‌همین طریق ثابت می‌شود که: $C=S_5$.

نتیجه

در این مقاله نشان دادیم، همان‌طور که ریاضیات نقش مهمی در به‌وجود آمدن رایانه و توسعهٔ آن داشته است، رایانه و به‌خصوص برنامه‌نویسی نیز می‌تواند نقش فوق‌العاده‌ای در توسعهٔ ریاضیات ایفا کند. ما این کار را برای درس‌های هندسهٔ رشتهٔ ریاضی و فیزیک و همچنین دستگاه‌ها و ماتریس‌ها انجام دادیم و در هر سه مورد به نتایج جالبی رسیدیم که در این مقاله در مورد چند نکته از هندسه بحث کردیم.

***منابع**

کتاب‌های هندسهٔ دورهٔ دبیرستان